Regression des Widerstands eines Thermistors

Martin Lieberherr, Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl

Einleitung

Zufällig bin ich in "The Physics Teacher", Feb. 2008, auf die Steinhart-Hart Gleichung zur Beschreibung eines Thermistors gestossen:

$$\frac{1}{T} = a + b \ln R + c (\ln R)^3$$

Die Parameter a, b und c werden für jeden Thermistor bestimmt. Die Temperatur wird in Kelvin und der Widerstand in Ohm eingesetzt. Thermistoren sind Widerstandselemente, deren Widerstandswert erheblich variiert, wenn die Temperatur sich ändert. Sie werden z.B. als Temperatursensoren verwendet.[1] Für NTC-Widerstände wird auch die B-Parameter Gleichung[2] verwendet:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{1}{B} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Beide Gleichungen gestatten es, aus dem Widerstand die Temperatur zu bestimmen. Temperatur- und Widerstandsmessungen sind einfach und Thermistoren sind billig. Deshalb plante ich ein Schüler-Praktikum über Thermistoren, wo Regressionen und grafische Darstellungen geübt werden.

Experiment

Ich beschaffte mir Thermistoren (NTC-Widerstandselemente des Typs B57164 der Firma EPCOS zum Preis von 1.50 Fr pro Stück via www.distrelec.ch) mit einem nominellen Widerstandwert von 10 kΩ bei 25 °C. Einen dieser Thermistoren steckte ich zusammen mit einem Digitalthermometer und etwas Eis in den Wasserkocher unseres Kaffeestübchens und mass den Widerstand als Funktion der Temperatur (Abb. 1). Die Messwerte stimmten in etwa mit den Angaben auf den Datenblättern des Herstellers überein.

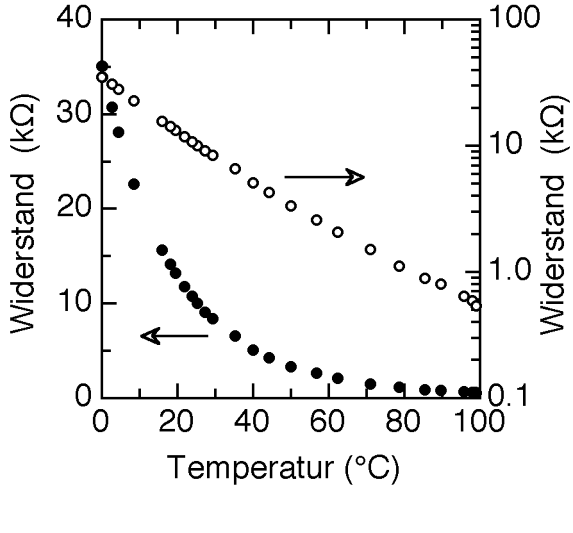

Abbildung 1: Elektrischer Widerstandswert eines Thermistors als Funktion der Temperatur. Die Rohdaten sind einmal linear (schwarze Punkte, linke Skala) und einmal semilogarithmisch (weisse Punkte, rechte Skala) aufgetragen. Die Messung sieht vernünftig aus und deutet in erster Näherung auf eine exponentielle Abhängigkeit hin.

Auswertung

Der Widerstand R scheint zwar exponentiell von der Celsius-Temperatur ϑ abzuhängen, eine Regressionsfunktion $R = a \cdot \exp(-b \cdot \vartheta)$ wäre aber physikalisch wenig sinnvoll. Erstens sollte eine absolute Temperaturskala T (Kelvin) verwendet werden und zweitens erwartet man aus der Thermodynamik einen Faktor der Art $\exp(W/kT)$ für den Widerstand respektive $\exp(-W/kT)$ für die Leitfähigkeit. Diese Vermutung lässt sich leicht grafisch prüfen: In einer semilogarithmischen Darstellung von R vs. $1/T$ sollte eine Gerade erscheinen (Abb. 2).

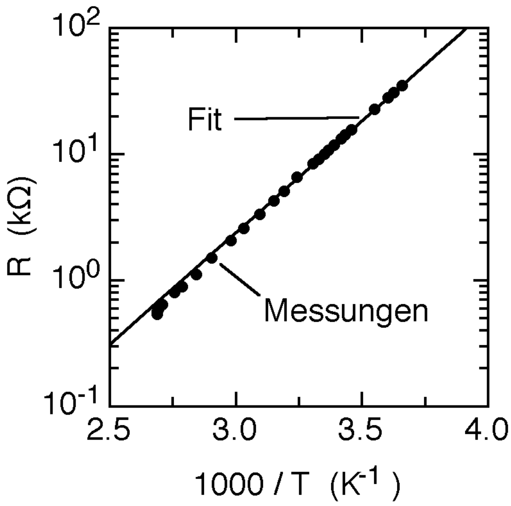

Abbildung 2: Elektrischer Widerstand R eines Thermistors als Funktion des Kehrwerts der absoluten Temperatur T (skaliert) in semilogarithmischer Darstellung.

Die eingezeichnete Fit-Funktion lautet $R = R_1 \exp(T_1/T)$ und hat die Parameterwerte $R_1 = 1.137 \cdot 10^{-5}$ kΩ sowie $T_1 = 4085$ K. Sie ist äquivalent zur B-Parameter Gleichung.

Will man den Thermistor als Temperatursensor verwenden, sollte die kleine Unstimmigkeit des Fits in Abb. 2 noch ausgeglichen werden. Dazu benötigt die Fit-Funktion weitere Parameter. Da man aus den Widerstandswerten die Temperatur bestimmen möchte, ist die Steinhart-Hart Gleichung ein geeigneter Ansatz:

$$\frac{1}{T} = a + b \cdot (\ln R) + c \cdot (\ln R)^3$$

Der Term mit dem Logarithmus zur zweiten Potenz wird meist weggelassen, weil er klein zu sein scheint.[3] Das Resultat der Rechnung ist in Abb. 3 dargestellt.

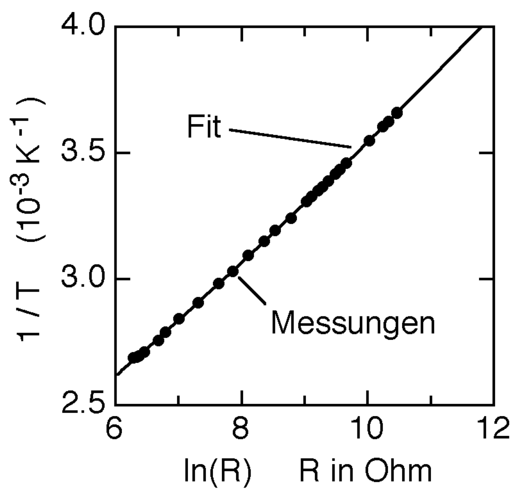

Abbildung 3: Darstellung der Messwerte mit der Regressionsfunktion
$y = a + b \cdot x + c \cdot x^3$
wobei $x = \ln(R)$, $y = 1/T$ und
$a = 1.3560 \cdot 10^{-3}$, $b = 2.045 \cdot 10^{-4}$ sowie
$c = 1.414 \cdot 10^{-7}$. R ist in Ohm und T in Kelvin eingesetzt worden.

Diese Regressionsfunktion passt deutlich besser als jene von Abbildung 2.

Die Steinhart-Hart Gleichung ist aber aus physikalischer Sicht ein Murks: Das Argument einer transzendenten Funktion sollte doch dimensionslos sein! Am einfachsten verwendet man das Verhältnis vom Widerstand zum Standardwiderstand R_S = 10 kΩ. Bei der Gelegenheit können wir noch kontrollieren, ob der quadratische Term tatsächlich so klein ist wie behauptet.

$$\frac{1}{T} = A + B \cdot \left(\ln\left(\frac{R}{R_S} \right) \right) + C \cdot \left(\ln\left(\frac{R}{R_S} \right) \right)^2 + D \cdot \left(\ln\left(\frac{R}{R_S} \right) \right)^3$$

Eine Regression mit diesen Werten liefert das Resultat in Abb. 4. Der Koeffizient des quadratischen Terms ist nicht klein im Vergleich zu jenem des kubischen Terms (auch wenn man die Werte vom Datenblatt des Herstellers verwendet).

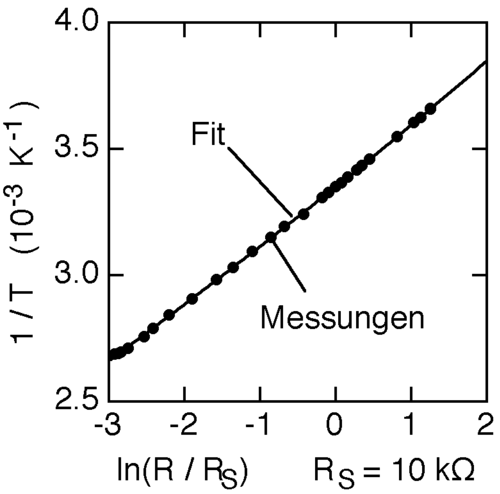

Abbildung 4: Messdaten mit der Regressionsfunktion
$y = A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3$ mit
$y = 1/T$, $x = \ln(R/R_S)$ und R_S = 10 kΩ.
Regressionswerte:
$A = 3.3500447423 \cdot 10^{-3}\ K^{-1}$
$B = 2.4043148164 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$
$C = 3.9970343067 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$
$D = 1.8094767184 \cdot 10^{-7}\ K^{-1}$

Fehlerbetrachtung

Wie könnten Mittelschüler, falls sich eine Gelegenheit dazu ergäbe, die Fehlerschranken der Regressionsparameter abschätzen? Sie könnten z.B. die Ausgangsdaten im Rahmen von deren Fehlerschranken zufällig variieren und die Auswirkung auf die Regressionsfunktion untersuchen. Mit den Daten und der Regressionsfunktion von Abbildung 4 ergeben sich Werte wie in Tabelle 1.
Für Tabelle 1 wurden Temperatur und Widerstand aller Messpunkte zufällig (gleichverteilt) im Rahmen der Fehlerschranken variiert, dann jeweils eine neue Regression gerechnet. Nur schon durch Betrachtung der Regressionsparameter kann man ungefähr sehen, wie viele Stellen signifikant sind. Will man diese Abschätzung noch mathematisch verbrämen, so berechnet man die Streuungen der Parameter. Absolute Fehlerschranken sind ja ungefähr das zwei- bis dreifache der Standardabweichung.

Fit-Nr.	A (10^{-3} K^{-1})	B (10^{-4} K^{-1})	C (10^{-6} K^{-1})	D (10^{-7} K^{-1})
0	3.350044	2.404314	3.997034	1.809476
1	3.350648	2.403180	3.201794	2.294582
2	3.350003	2.405124	3.649262	-0.190997
3	3.349971	2.408279	3.857097	2.193201
4	3.350139	2.419796	2.603898	-7.475865
5	3.349367	2.403943	4.959929	7.646871
6	3.349903	2.404804	3.696684	4.073201
7	3.349928	2.396860	4.088343	8.688382
8	3.351035	2.412100	2.078604	-5.292967
9	3.350818	2.425251	2.542719	-8.975821
10	3.350864	2.397862	4.516071	3.326817
s	0.000517	0.008651	0.879243	5.775090

Tabelle 1: Regression der Messwerte nach Abb. 4 (Fit Nr. 0) mit zufällig im Rahmen der Fehlerschranken variierten Messwerten (Fit Nr. 1-10) und der Streuung (empirische Standardabweichung) s der Regressionsparameter.

Man erkennt in Tabelle 1 sofort, dass sich der Koeffizient D der dritten Potenz (siehe Legende von Abbildung 4) im Rahmen der Fehlerschranken nicht von Null unterscheidet, der Koeffizient C der zweiten Potenz müsste noch genauer betrachtet werden. Man hüte sich davor, die Streuungen allzu ernst zu nehmen, denn am Anfang der Fehlerbetrachtung stehen die krude geschätzten Fehlerschranken für Temperatur und Widerstand.
Unsere Fehlerbetrachtung zeigt aber immerhin, dass eine Regression der B-Parameter Gleichung sinnvolle Werte liefert. Damit die Steinhart-Hart Gleichung statistisch signifikante Parameter hat, müssten genauere Messwerte vorliegen.

Quellen

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Thermistor (Aufruf am 1. Juni 2008)
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Thermistor (Aufruf am 1. Juni 2008)
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Steinhart-Hart_equation (Aufruf am 1. Juni 2008)