Rundbogen

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

In den Frühlingsferien spazierte ich in Disentis zum Bahnhof und lief auf dem Weg dorthin unter einer dieser schönen, steinernen Eisenbahnbrücken der RhB hindurch. Die Bögen des Viadukts schienen mir Halbkreise zu sein. Freie Bögen oder Tonnengewölbe müssen nur ihr eigenes Gewicht tragen. Die optimale Form ist eine Katenoide. Aber der Bogen des Viadukts trägt ja mehr als nur den Bogen. Ist dann der Kreis die optimale Form? Im zweiten Abschnitt wird die bekannte Rechnung für die Kettenlinie ins Gedächtnis gerufen, um sie in den folgenden Abschnitten variieren zu können.

2 Kettenlinie

Robert Hooke hatte 1675 die Idee, den freien Bogen als umgedrehte Kettenlinie zu betrachten [1]. Die Kette ist nur auf Zug belastbar, d.h. die Drehmomente auf die Kettenglieder verschwinden. Dreht man die Kette um, so erhält man eine sog. Stützlinie, d. h. einen Bogen, der nur auf Druck belastet ist. Die Stützlinie eines freien Bogens ist also eine umgedrehte Katenoide, siehe Abbildung 1. Natürlich müssen geeignete Idealisierungen gemacht werden: Der Bogen ist dünn und das Gewicht pro Länge ist konstant.

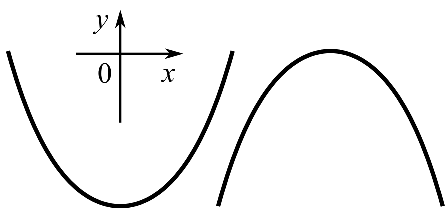

Abbildung 1: Ein freitragender Bogen hat die Form einer umgedrehten Katenoide.

Auf ein Kettenglied der Länge dl wirken drei Kräfte, siehe Abbildung 2: Die Zugkraft des oberen Kettenstücks mit Komponenten F_x und F_y, die Erdanziehungskraft dF_y auf das Glied sowie die Zugkraft des Kettenstücks unterhalb des betrachteten Glieds. Weil das Kettenglied im Gleichgewicht ist, müssen sich die Kräfte kompensieren. Da die Kette flexibel ist, wirken die Zugkräfte tangential zur Kettenlinie, d.h.

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Die horizontalen Zugkräfte F_x sind bei allen Gliedern gleich, sonst würden die Kettenglieder horizontal beschleunigen. F_x wird durch die Aufhängung (Lage der Befestigungspunkte, etc.) bestimmt und ist ein freier Parameter.

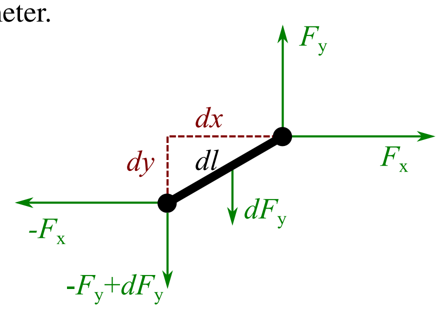

Abbildung 2: Auf ein Kettenglied der Länge dl wirken die Zugkraft der Kette oberhalb des Glieds (aufgeteilt in F_x und F_y), die Zugkraft der Kette darunter sowie die Gewichtskraft dF_y. Die Skizze ist nicht massstäblich.

Sei γ das längenspezifische Gewicht eines Kettenglieds, d.h. $\gamma = dF_y/dl$. Dann gilt

$$dF_y = \gamma \cdot dl = \gamma \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dF_y}{dx} = \gamma \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{2}$$

Leiten wir Gleichung (1) nach x ab und verwenden (2), so erhalten wir die Differentialgleichung der Kettenlinie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{F_x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{3}$$

Die Lösung von (3) ist ein spezieller Cosinus hyperbolicus. Der Graph heisst Katenoide.

$$y = a \cdot \cosh \frac{x - x_S}{a} + c \tag{4}$$

Die freien Parameter x_S, $a = F_x/\gamma$ und c werden durch die Kettenlänge sowie die Randwerte (Aufhängepunkte) festgelegt.

Nun wollen wir dieses wohlbekannte Thema etwas variieren.

3 Rundbogen

Bereits Robert Hooke hatte die Idee, zusätzliche Kräfte auf den Bogen durch Zusatzgewichte zu modellieren, um die Form der Stützlinie zu erhalten. Wie muss diese Zusatzbelastung verteilt sein, damit der Bogen kreisförmig wird? In Abbildung 3 sind die Zusatzgewichte dargestellt als Kettenstücke, die vertikal an einem Faden hängen: Die Länge der Kettenstücke ist dann proportional zur Last. Das Eigengewicht des Fadens sei jetzt vernachlässigbar gegen die Zusatzgewichte. Die hängenden Kettenstücke seien horizontal gleichabständig. Bei einem Torbogen kann man sich ja vorstellen, dass die Ziegelsteine vertikal darüber geschichtet werden und eine feste Breite haben.

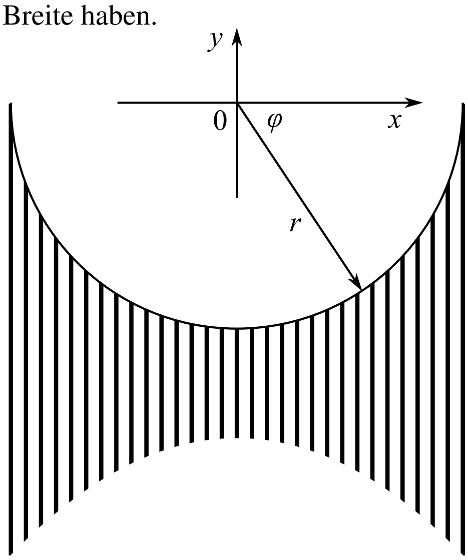

Abbildung 3: Wie muss der Faden belastet werden, damit er einen Halbkreis bildet? Die Zeichnung ist nicht massstäblich.

Die Kraft auf ein Fadenstück erfüllt immer noch Gleichung (1). Sei diesmal $\gamma(x)$ die gesuchte Lastverteilung, siehe Gleichung (5). Kombinieren wir die Gleichung (5) mit (1), so folgt (6).

$$\gamma(x) = \frac{dF_y}{dx} \tag{5}$$

$$\gamma(x) = F_x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \tag{6}$$

Wenn wir also für $y(x)$ die Halbkreis-Gleichung (7) einsetzen, erhalten wir direkt die Lastverteilung (8).

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \tag{7}$$

$$\gamma(x) = F_x \cdot \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} = F_x \cdot \frac{r^2}{y^3} = F_x \cdot \frac{r^2}{(r\sin\varphi)^3} = \frac{F_x}{r} \cdot \frac{1}{\sin^3\varphi} \tag{8}$$

Die Lösung (8) findet man auch in [2]. Die Belastung müsste an den Aufhängepunkten sehr gross werden, damit der Faden dort vertikal hängt. Das ist unrealistisch und war zu erwarten. Der Rundbogen ist also keine optimale Form für dieses Problem. Zum Glück ist es baulich nicht so kritisch: Es genügt, wenn die Stützlinie innerhalb des Mauerbogens verläuft. Das ist leicht erfüllbar, wenn man genügend breite Steine nimmt. Früher hatte man ja immer das Problem, dass die Bögen von einfachen Handwerkern gebaut werden mussten. Komplizierte Formen liessen sich schlecht realisieren. Der Rundbogen oder der aus Kreisbögen zusammengesetzte Spitzbogen waren gute Kompromisse.

4 Viaduktbogen

Die Zusatzbelastung bei einem Viaduktbogen folgt nicht Gleichung (8). Der Viaduktbogen muss ja die Last des darüber liegenden Mauerwerks tragen. Modelliert als Faden, an den in gleichen horizontalen Abständen Ketten gehängt werden, müsste die Lastverteilung wie in Abbildung 4 aussehen, d.h.

$$\gamma(x) = \frac{dF_y}{dx} \propto y - y_1 \tag{9}$$

wobei y_1 die Koordinate ist, bis zu der alle Lastketten hinunter hängen (die Fahrbahn beim Eisenbahnviadukt ist horizontal). Damit folgt aus Gleichung (1) und (9) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \propto y - y_1 \tag{10}$$

Die Lösung von (10) ist ein Cosinus hyperbolicus (nicht unbedingt eine Kettenlinie).

$$y = a \cdot \cosh\frac{x - x_S}{b} + c \tag{11}$$

Die zweite Lösung von (10) wäre ein Sinus hyperbolicus, die aber ausser Betracht fällt, weil sie die falsche Symmetrie aufweist.

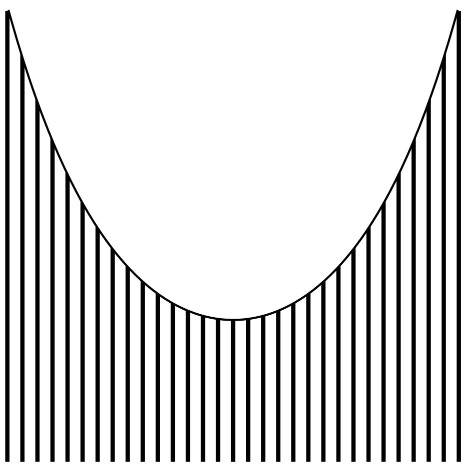

Abbildung 4: Welche Form nimmt der tragende Faden an, wenn er in der dargestellten Art durch angehängte Ketten belastet wird?

5 Ausblick: Hängebrücke

In derselben Weise kann auch die Form eines Hängebrückengurts berechnet werden: Diesmal sind die angehängten Lastketten alle gleich lang, denn jedes Hängeseil trägt denselben Anteil an der Fahrbahn, siehe Abbildung 5.

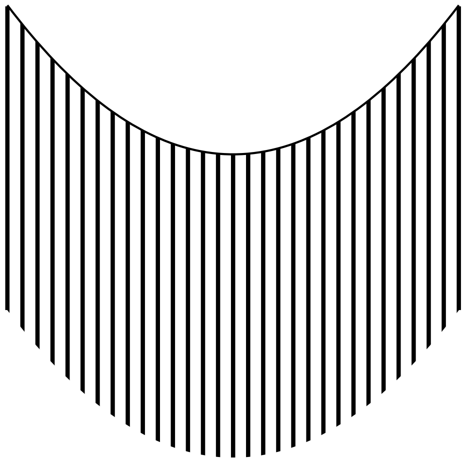

Abbildung 5: Welche Form nimmt der tragende Faden an, wenn er gleichmässig durch gleich schwere Ketten belastet wird?

In Gleichung (5) wird jetzt

$$\frac{dF_y}{dx} = \gamma = const \tag{12}$$

und Gleichung (6) vereinfacht sich zu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{F_x} = const \tag{13}$$

Die Lösung von (13) ist eine Parabel. Der Hängebrückengurt wird also durch die Hängeseile so belastet, dass er eine parabolische Form annimmt.

Literatur

[1] http://ingenieurbüro-böttcher-asl.de/mediapool/88/885822/data/Gewoelbe.pdf (Abruf am 30. April 2014)

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Stützlinie (Abruf am 30. April 2014)

26. Juni 2014/ Lie.