# Kepler-Auge

Martin Lieberherr, MNG-Rämibühl, 8001 Zürich
13. Oktober 13

## Einleitung

Für eine Folie wollte ich eine Auswahl an Keplerschen Ellipsen zeichnen. Die Ellipsen sollten alle zum gleichen Gravitationszentrum und zur gleichen Gesamtenergie respektive Umlaufzeit $T$ gehören. Ein Kleinkörper der Masse $m$ auf einer Ellipse mit grosser Halbachse $a$ um ein Zentrum der Masse $M$ hat die Energie

$$E_{total} = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r} + \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} \quad \text{3. Kepler-Gesetz}$$

Gibt man die grosse Halbachse $a$ und die Apheldistanz $r$ vor, so kann man leicht die Geschwindigkeit $v$ im Aphel bestimmen und damit eine numerische Simulation starten, siehe Abbildung 1.

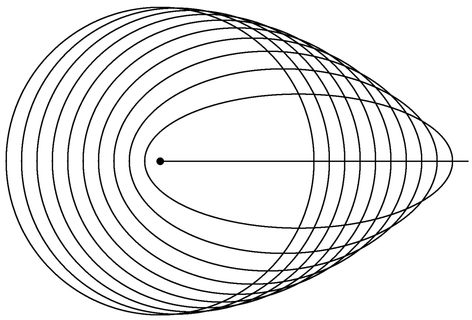

*Abbildung 1: Eine Auswahl an Bahnen mit gleicher grosser Halbachse und gleichem Brennpunkt. Die Exzentrizität variiert von $\epsilon = 0$ (Kreis) bis $\epsilon = 1$ (Strecke). Die Bahnen wurden mit dem Euler-Cromer Verfahren numerisch integriert. Das (feste) Gravitationszentrum ist mit einem fetten Punkt markiert.*

## Einhüllende

In Abbildung 1 fiel mir auf, dass die Ellipsen auf der rechten Seite eine Hüllkurve zu haben scheinen. Um diese deutlicher hervorzuheben, überlagerte ich sehr viele Ellipsen, siehe Abbildung 2. Ausserdem habe ich noch die Ellipsenschar auf der linken Seite ergänzt, weil sich dann ein hübsches 'Auge' ergibt.

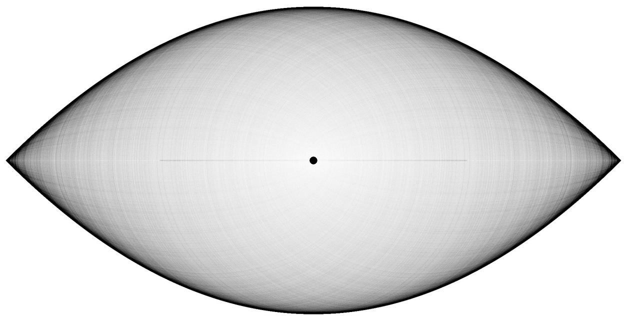

*Abbildung 2: Alle Ellipsen gleicher Energie mit Perihel auf einer Geraden durchs Gravitationszentrum bilden eine Art Auge. Mit welcher Gleichung wird die Einhüllende beschrieben?*

Legt man eine Parabel über das Auge in Abbildung 2, so passt sie perfekt. Ich benötigte einen Abend, um zu beweisen, dass folgende Gleichung die obere Hüllkurve beschreibt:

$$y = a \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)$$

Kann man das brauchen? Wohl eher nicht, aber ich hatte meinen Spass daran und immerhin eine neue Folie.

# Appendix: Herleitung der Hüllkurvengleichung

$r = \dfrac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$ Ellipse in Polarkoordinaten mit Exzentriztiät $\epsilon$ und Parameter $p$

$r = \dfrac{a\cdot(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\phi}$ da $p = b^2/a = a\cdot\left(1-\epsilon^2\right)$

Darstellung in kartesischen Koordinaten: $x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \quad \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a\cdot(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\epsilon x = a\cdot(1-\epsilon^2) \Rightarrow$$

$y = (\pm)\sqrt{(a\cdot(1-\epsilon^2)-\epsilon x)^2 - x^2}$ Gleichung der Ellipsenschar

Hüllkurve: $\dfrac{\partial y}{\partial\epsilon} = 0 = \dfrac{1}{2\sqrt{\ldots}}\cdot 2\cdot\left(a-a\epsilon^2-\epsilon x\right)\cdot(-2a\epsilon-x) \Rightarrow$

$\epsilon_1 = -\dfrac{x}{2a}$ und $\epsilon_{2,3} = \dfrac{-x\pm\sqrt{x^2+4a^2}}{2a}$

Setzen wir $\epsilon_1$ in die Ellipsenschar-Gleichung ein, so folgt:

$$y = \sqrt{\left(a - a\cdot\frac{x^2}{4a^2}+\frac{x}{2a}\cdot x\right)^2 - x^2} = \sqrt{\left(a+\frac{x^2}{4a}\right)^2 - x^2} = a\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)^2-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$y = a\sqrt{1+\frac{x^2}{2a^2}+\left(\frac{x^2}{4a^2}\right)^2-\frac{x^2}{a^2}} = a\sqrt{1-\frac{x^2}{2a^2}+\left(\frac{x^2}{4a^2}\right)^2} = a\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{4a^2}\right)^2}$$

$$y = a\cdot\left(1-\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)$$

Die letzte Zeile beschreibt eine quadratische Funktion, d.h. die obere Hüllkurve ist eine Parabel. Die quadratische Funktion hat Nullstellen bei $x_{1,2} = \pm 2a$, was stimmt, und das Maximum $y_{max} = a$ bei $x = 0$, was auch zutrifft. Für die untere Hüllkurve muss nur ein negatives Vorzeichen gesetzt werden.