

Hyperbolischer Kepler

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Die keplerschen Gesetze sind ein Kulturgut ersten Ranges. Während Kopernikus “lediglich” das heliozentrische Weltbild des Aristarch von Samos wieder aufgewärmt und erweitert hat, zerstörte Kepler das alte Dogma der Kreisbewegung von Himmelskörpern. Newton hat in den “Principia” aus den ersten zwei keplerschen Gesetzen die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft hergeleitet (1687)¹. Heute wird die Rechnung meistens in der umgekehrten Richtung präsentiert: Mit Hilfe des dritten keplerschen Gesetzes wird das Gravitationsgesetz für Kreisbahnen motiviert. Anschliessend wird bewiesen, dass Kegelschnittbahnen aus dem Kraftgesetz folgen.² Das ist seltsam indirekt. Ich möchte im Folgenden zeigen, wie aus den ersten zwei Gesetzen das dritte keplersche Gesetz und das newtonsche Gravitationsgesetz direkt hergeleitet respektive motiviert werden können.

Damit nicht nur Altbekanntes³ frisch verpackt wird, übertrage ich die keplerschen Gesetze von elliptischen auf hyperbolische Bahnen. Was wird dabei aus dem dritten Gesetz? Wie werden die Eigenschaften der Hyperbel aus den physischen Bewegungsdaten bestimmt?

2 Hyperbeln

Die Hyperbel ist ein Kegelschnitt, siehe Abbildung 1. In einer Formelsammlung⁴ findet man:

Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten	(1)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$	(2)
a Abstand Zentrum-Hauptscheitel	$p = b^2/a$ Parameter, (halbes) Quermass	(3)
c Abstand Zentrum-Brennpunkt	$\varepsilon = c/a > 1$ (numerische) Exzentrizität	(4)
$c^2 = a^2 + b^2$	$p = (\varepsilon^2 - 1) \cdot a$	(5)

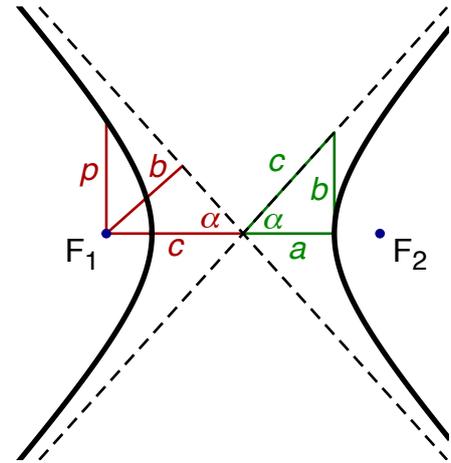
Damit lassen sich die ersten zwei keplerschen Gesetze z.B. folgendermassen schreiben:

1. Meteoritenbahnen sind Hyperbeln, in deren einem Brennpunkt die Erde steht.
2. Die Verbindungslinie Erde-Meteorit überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Es versteht sich von selbst, dass vom Luftwiderstand abgesehen wird. Ein Meteorit ist ja eigentlich ein kosmischer Kleinkörper, der in die Atmosphäre eingedrungen ist und dort einen Meteor (Leuchterscheinung, e.g. eine Sternschnuppe) produziert. Vor dem Eintritt in die Atmosphäre wird der Meteorit “Meteoroid” genannt. Statt des Meteoriten könnte man auch eine Raumsonde betrachten, die an einem anderen Himmelskörper ein swing-by Manöver durchführt. Im Fokus der Hyperbel befindet sich natürlich der Schwerpunkt der Erde respektive des betrachteten Zentralkörpers.

Abbildung 1: Hyperbel mit Exzentrizität $\varepsilon = 3/2$ und Parameter $p = 1$ (willkürl. Einheiten). Mit diesen Zahlen ist der Abstand der Scheitel $2a = 8/5$, der Abstand der Brennpunkte $2c = 12/5$ und der Steigungswinkel der Asymptoten 48.19° .

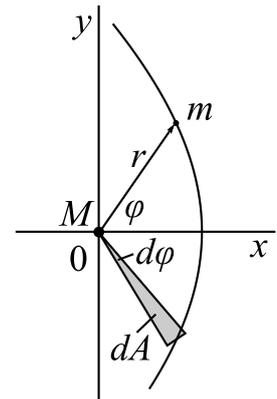
Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte P, deren Abstandsdifferenz zu den zwei Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist: $|F_1P - F_2P| = 2a$. Die Hyperbel hat zwei bezüglich des Zentrums punktsymmetrische Äste. Sie hat zwei Geraden mit Steigung $\tan \alpha = \pm b/a$ respektive $\cos \alpha = 1/\varepsilon$ als Asymptoten. Die Brennpunkte haben Abstand b von diesen Asymptoten. Man nennt a auch reelle Halbachse, b imaginäre Halbachse und c lineare Exzentrizität. Der Parameter p ist gleich der Bahnkrümmung im Scheitel der Hyperbel.



3 Flächensatz

Abbildung 2 illustriert den Flächensatz und führt Koordinaten ein. Wir werden den Flächensatz später verwenden, um die Zeitabhängigkeit des Kraftgesetzes zu eliminieren.

Abbildung 2: Die Position des Meteoriten (Testmasse m) kann in Polarkoordinaten (r, φ) oder kartesischen Koordinaten (x, y) dargestellt werden. Im Ursprung des Koordinatensystems befinden sich der eine Brennpunkt und der Zentralkörper (Masse M).



$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \quad (6)$$

Die von der Verbindungslinie überstrichene Fläche kann als Kreissektor mit Radius r und Zentriwinkel $d\varphi$ angenähert werden. Für infinitesimal kleine Winkel wird diese Näherung exakt. (Die überstehende Ecke des Sektors in Abb. 2 wird gleich gross wie die fehlende Ecke.) Der Flächensatz lautet damit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \ell = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \quad (7)$$

Die zur späteren Verwendung eingeführte Abkürzung $\ell = L/m$ ist der spezifische Bahndrehimpuls des Meteoriten (Betrag). Aus dem Flächensatz folgt ausserdem, dass die Beschleunigung radial gerichtet ist, denn

$$2 \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (8)$$

Das Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{a}$ verschwindet nur, falls die Beschleunigung \vec{a} parallel zu \vec{r} ist (in der Regel sind ja sowohl \vec{r} als auch \vec{a} verschieden von Null). Diese Überlegung stammt von Newton, natürlich noch ohne Vektoren und Ableitungen formuliert.

4 Herleitung des Gravitationsgesetzes

Wie berechnen aus der Bahngleichung eines Kegelschnitts mit Hilfe des Flächensatzes die Beschleunigung, dann motivieren wir mit Hilfe der newtonschen Axiome das Kraftgesetz.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{p \cdot \varepsilon \sin \varphi \cdot d\varphi/dt}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \quad (10)$$

$$\vec{v} = \frac{p}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi \sin \varphi \\ \varepsilon \sin^2 \varphi + \cos \varphi + \varepsilon \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (11)$$

$$\vec{v} = \frac{r^2}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi + \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \frac{\ell}{r^2} = \frac{\ell}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi + \varepsilon \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\ell}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{p} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{\ell}{r^2} = -\frac{1}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{\ell^2}{p} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\ell^2}{p} \quad (13)$$

Damit ist die Hauptarbeit gemacht: Die Beschleunigung ist umgekehrt proportional zum Abstand im Quadrat. Sie ist zum Nullpunkt des Koordinatensystems, also zum Brennpunkt des Kegelschnitts gerichtet. Zusammen mit dem zweiten newtonschen Axiom folgt für die Gravitationskraft:

$$\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_G = -\frac{\ell^2}{p} \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (14)$$

Es scheint zunächst so, als ob die Proportionalitätskonstante ℓ^2/p für jede Bahn eine andere wäre. Dem ist aber nicht so. Wenn sich zwei Bahnen mit unterschiedlichen spezifischen Drehimpulsen ℓ und Parametern p kreuzen, muss die Beschleunigung am Kreuzungspunkt dieselbe sein. Das Verhältnis ℓ^2/p ist eine Konstante, welche durch den Zentralkörper mitbestimmt wird.

Das dritte newtonsche Axiom legt nahe, dass die Gravitationskraft symmetrisch bezüglich der Massen ist:

$$\vec{F}_G = -\frac{\ell^2}{Mp} \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \stackrel{\text{Def}}{=} -G \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad G = \frac{\ell^2}{Mp} \quad (15)$$

Die Gravitationskonstante G muss im Labor gemessen werden. Hingegen ist der so genannte Gravitationsparameter $\mu = GM = \ell^2/p$ nur durch die Bewegung des Meteoriten bestimmt. Die Gravitationsparameter einiger Himmelskörper im Sonnensystem sind tabelliert⁴ und viel genauer bekannt als die Gravitationskonstante.

Im Falle einer Ellipsenbahn kann aus $\ell^2 = \mu p$ das dritte keplersche Gesetz gewonnen werden.

$$\ell = 2 \cdot \frac{dA}{dt} = 2 \cdot \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow \ell^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} = \mu p = \mu \frac{b^2}{a} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad (\text{Kepler III}) \quad (16)$$

Im Falle einer Hyperbelbahn ist der spezifische Bahndrehimpuls $\ell = b v_\infty$, wobei v_∞ die Bahngeschwindigkeit im Unendlichen ist, der so genannte hyperbolische Exzess. Damit folgt aus $\ell^2 = \mu p$

$$\ell^2 = b^2 v_\infty^2 = \mu \frac{b^2}{a} \Rightarrow \mu = a v_\infty^2 \quad (17)$$

Der hyperbolische Exzess v_∞ bestimmt also die reelle Achse a der Hyperbelbahn um einen Zentralkörper mit Gravitationsparameter $\mu = GM$. Damit erhalten wir für die Gesamtenergie eines Meteoriten der Masse m :

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{\mu m}{2a} = \frac{GMm}{2a} \quad (18)$$

Das ist, bis auf das Vorzeichen, dieselbe Formel wie für eine Ellipsenbahn. Die Gesamtenergie bestimmt also die reelle Achse a der Hyperbelbahn. Die numerische Exzentrizität ε folgt aus dem spezifischen Drehimpuls ℓ :

$$\ell^2 = \mu p = \mu a (\varepsilon^2 - 1) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{\mu a}} \quad (19)$$

Eine ganz ähnliche Beziehung gilt auch für Ellipsenbahnen (mit anderen Vorzeichen).

5 Numerischer Test

Nach langen Rechnungen bin ich immer unsicher, zumal ich kaum etwas ohne Flüchtigkeitsfehler zu Papier bringe. Testen wir doch die Beziehungen, siehe Abbildung 3.

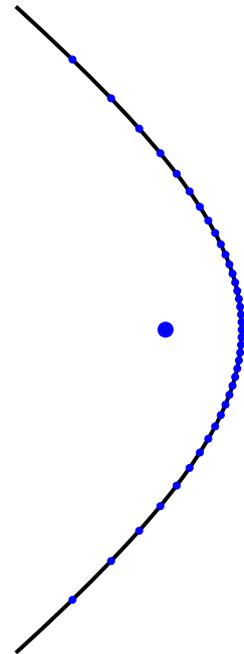
Abbildung 3: Simulation einer hyperbolischen Keplerbahn (Line) verglichen mit theoretisch berechneten Positionen (Punkte). Das newtonsche Gravitationsgesetz wurde mit dem Euler-Cromer Verfahren numerisch integriert. Start war im Perizentrum im Abstand r_P mit Geschwindigkeit v_P . Die Theorie liefert daraus die exakten Eigenschaften p und ε der Hyperbel.

$$\text{Start im Perizentrum: } r_P = 1 \quad v_P = 1.5 \quad (GM = 1) \quad (20)$$

$$\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} \Rightarrow a = 4 \quad (21)$$

$$\varepsilon = 1 + r_P/a = 1.25 \quad p = (\varepsilon^2 - 1) \cdot a = 2.25 \quad (22)$$

$$v_\infty = \sqrt{\mu/a} = 0.5 \quad \text{alles in willkürlichen Einheiten} \quad (23)$$



6 Schlusswort

Einen Teil dieser Rechnung, Gleichungen (6)-(7) und (9)-(13) habe ich mit Schülerinnen und Schülern im Ergänzungsfach Physik durchgeführt. Die meisten Schritte wurden gut verstanden, die Klassen haben jedenfalls alle meine Flüchtigkeitsfehler gefunden. Die grösste Schwierigkeit bot die innere Ableitung $d\varphi/dt$, welche in Gleichung (10) auftaucht. Dass sie nicht weiter ausgerechnet werden kann, ist ungewohnt.

Aus dem Steigungswinkel der Asymptoten liesse sich der Ablenkwinkel des Meteoriten oder der Raumsonde an einem Planeten berechnen. Für einen Meteoriten, der mit Lichtgeschwindigkeit am Sonnenrand vorbeifliegt, erhielte man die berühmten $0.875''$ Ablenkung des Johann Georg von Soldner⁵. Einstein erhielt für die Lichtablenkung am Sonnenrand das Doppelte. Die Rechnung liesse sich auch übertragen auf die Ablenkung eines Alphateilchens an einem Goldatomkern. Die Rutherford'sche Streuformel liegt in Griffweite. Und wer noch nicht genug hat, kann ja selber eine keplersche Parabelbahn durchrechnen.

¹ G. Markowsky, "A retelling of Newton's work on Kepler's Laws", *Expositiones Mathematicae* 29 (2011) 253–282

² Newton hat, gemäss mehrerer Autoren, die Herleitung der Ellipsenbahn aus dem Kraftgesetz nicht vollständig angegeben. Dies sei 1710 durch Johann Bernoulli nachgeholt worden. M. Nauenberg, "Newton's Principia and Inverse-Square Orbits", *The College Mathematics Journal*, Vol. 25, No. 3 (May, 1994), pp. 212-222 (und die Referenzen darin).

³ https://en.wikipedia.org/wiki/Binet_equation (Abruf am 15. Feb. 2021)
Jacques Philippe Marie Binet hat das Kraftgesetz für beliebige spiralförmige Bahnen hergeleitet.

⁴ DMK/DPK/DCK, "Formeln, Tabellen, Begriffe", Orell Füssli Verlag, Zürich, 7. Auflage, 2019

⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Georg_von_Soldner (Abruf am 17. Feb. 2021)